Lycée Saint-Charles

# DEVOIR PASSERELLE DE MATHEMATIQUES

## A destination des élèves Spécialité Maths en terminale générale

***Ce devoir est à rédiger sur feuille convenablement présentée et à rendre à votre professeur de mathématiques le jour de la rentrée.***

*Tous les éléments nécessaires à sa réalisation ont été étudiés pendant l'année de Première.*

Exercice 1 :

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2018 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2018.

On estime que chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique $(a_n)$. On note $a_0 = 2\,500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2018 et $a_n$ le nombre d'inscrits à la médiathèque durant l'année $2018 + n$.

1)
   a) Calculer $a_1$ et $a_2$.
   b) Justifier que pour tout entier naturel $n$, la relation $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 400$.
2) Pour tout entier naturel $n$, on pose $w_n = a_n - 2000$.
   a) Exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$.
   b) En déduire que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}8$ et de terme initial $w_0 = 500$
   c) En déduire l'expression de $w_n$ en fonction de $n$.
   d) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2000$.
3) Que peut-on dire du nombre d'adhérents à la médiathèque si le rythme d'inscription reste le même au cours des années à venir ? (On pourra utiliser la calculatrice).

Exercice 2 :

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20€. Pour le promouvoir, chaque client lance à l'entrée un dé cubique non truqué. Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ; si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif ; sinon, le client paye plein tarif.

Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque résultat du lancer de dé, associe le prix payé par le client.

a) Déterminer la loi de probabilité de $X$. Présenter les résultats à l'aide d'un tableau.
b) Calculer l'espérance mathématique de $X$.
c) Que peut espérer l'association, si la salle composée de 2000 places, est pleine ?

Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction définie sur $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x - 8}{x+1}.$$

a) On admet que $f$ est dérivable sur $D_f$. Montrer que pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 6x + 4}{(x+1)^2}.$$

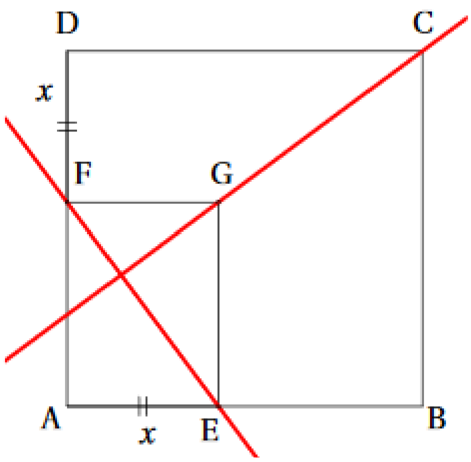
b) On définit pour tout réel $x$, $P(x) = 2x^3 - 6x + 4$.
Montrer que pour tout réel $x$, $P(x) = 2(x-1)(x^2 + x - 2)$.
En déduire le signe de $P(x)$.

c) Etudier le signe de $f'(x)$.

d) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur $D_f$.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit $x$ un nombre réel de $[0; 1]$.
Soit $E$ le point de $[AB]$ et $F$ le point de $[AD]$ tel que $AE = DF = x$




Montrer que, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, les droites $(CG)$ et $(EF)$ sont perpendiculaires

*Pour cet exercice, une résolution détaillée est attendue, accompagnée de justifications précises et rigoureuses. Dans le cas où vous ne parvenez pas à résoudre ce problème, il vous est demandé de présenter vos pistes de recherches, même inabouties.*

<u>Exercice 5 :</u>

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. On dispose des informations suivantes :

- 56% des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission;
- 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :

- $M$ : « le téléspectateur a regardé le match »;
- $E$ : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note $x$ la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

a) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

b) Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

c) Vérifier que $P(E) = 0{,}44x + 0{,}14$.

d) En déduire la valeur de $x$.

e) Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, qu'il ait regardé le match ?